3.1.1 Vypočítajte limity funkcií:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-4x}{2x^2+3x}$,

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$,

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3+1}$,

3.1.2 Zistite, ktorá z daných funkcií je spojitá.

a) $f: y=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x+3}, & x\neq -3\\ 6, & x=3\end{cases}$

b) $f: y=\begin{cases}\dfrac{x^3-4x}{x-2}, & x\neq 2\\ 8, & x=2\end{cases}$

c) $f: y=\begin{cases}3+x^2, & x\leq 0\\ \dfrac{\sin 3x}{x}, & x>0\end{cases}$

3.1.3 Určte parameter *a* tak, aby funkcia f bola spojitá:

a) $f: y=\begin{cases}ax, & x<1\\ 2-\dfrac{x}{a}, & x\geq 1,\end{cases}$

b) $f: y=\begin{cases}e^{ax}, & x<0\\ a-x, & x\geq 0,\end{cases}$

c) $f: y=\begin{cases}\dfrac{-1}{x^2+a}, & x<0\\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^x, & x\geq 0\end{cases}$

d) $f: y=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & x\leq -1\\ x^2+ax, & x>-1\end{cases}$

3.1.4 Nájdite asymptoty grafu funkcie

a) $f: y=\dfrac{x}{x+4}$

b) $f: y=\dfrac{1-x^2}{x-2}$

c) $f: y=\dfrac{2x^2}{2x-1}$

d) $f: y=3x+\dfrac{3}{x-2}$

f) $f: y=xe^{\frac{1}{x^2}}$

g) $f: y=4xe^{-x^2}$

h) $f: y=x+e^{-x}$

i) $f: y=x+\dfrac{\ln x}{x}$

2.2.4

b) $\lim_{n\to\infty} (n+1)\cdot[\ln(n+1)-\ln(n+2)] = \lim_{\infty}[(n+1)\cdot\ln\frac{n+1}{n+2}] = \lim_{\infty}[(n+1)\cdot\ln(\frac{n+2}{n+2}+\frac{-1}{n+2})] =$

Platí: $\log x+\log y=\log(x\cdot y)$

$\log x-\log y=\log(\frac{x}{y})$

$= \lim_{\infty}\left((n+1)\cdot\ln\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{-1}}\right)^{\frac{n+2}{-1}}\right]^{\frac{1}{\frac{n+2}{-1}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-(n+1)}{n+2}\cdot\ln\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{-1}}\right)^{\frac{n+2}{-1}}}_{\to e}\right) = -1\cdot\ln e = -1\cdot 1 = \underline{\underline{-1}}$

$\circledast \lim_{n\to\infty}\frac{-(n+1)}{n+2} = \lim_{\infty}\frac{-n-1}{n+2}\ {}^{\cdot\frac{1}{n}}_{\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{\infty}\frac{-1-\frac{1}{n}\to 0}{1+\frac{2}{n}\to 0} = \frac{-1}{1} = \underline{-1}$

3.1.1

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-2x}$ → ak máme limitu funkcie a x sa blíži k nejakému číslu (v tomto prípade $x\to 2$), tak vždy skúsime najprv číslo dosadiť za x:

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-2x} \overset{?}{=} \frac{2^2-2-2}{2^2-2\cdot 2} = \frac{0}{0}$ → nemá zmysel

~ vyšlo nám $\frac{0}{0}$, čo je nezmysel.

Postupujeme teda tak, že čitateľa aj menovateľa upravíme na tvar: $\frac{(x-a)\cdot\text{niečo}}{(x-a)\cdot\text{niečo}}$, kde (a) je číslo, ku ktorému sa blíži x (u nás $a=2$):

[keby po dosadení vyšlo niečo pekné, teda nejaké číslo alebo $\pm\infty$, bol by to hneď výsledok]

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x\cdot(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$$

dosadíme

x^2-x-2: $D=1+4\cdot 2=9$

$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm 3}{2}=\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}$ $\Rightarrow x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

3.1.1

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-4x}{2x^2+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(x^2-4)}{x\cdot(2x+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4}{2x+3}=\frac{0^2-4}{2\cdot 0+3}=\frac{-4}{3}$$

c) $$\lim_{x\to -1}\frac{x^3}{(x+1)^2}=\frac{(-1)^3}{(-1+1)^2}=\frac{-1}{0}\Rightarrow \nexists$$ (neexistuje)

→ ak vyjde $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{\pm\infty}{0}, \frac{0}{\pm\infty}, \frac{0}{0}$ → musíme rátať inak

ak vyjde $\frac{\text{číslo}\neq 0}{0}\Rightarrow \nexists$ limita

d) $$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2\cdot(x-1)}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}=\frac{(-1+1)\cdot(-1-1)}{(-1)^2-(-1)+1}=\frac{0}{3}=0$$

platí vzorec: $x^3+1=(x+1)\cdot(x^2-x+1)$

3.102

a) $f: y = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & x \neq -3 \\ 6 & x = -3 \end{cases}$ → je to zložene zapísaná funkcia a znamená:

ak $x=3$ tak $y=6$

inak $y = \frac{x^2-9}{x+3}$

tu je chyba v zadaní, má tam byť $x=-3$

→ či je funkcia spojitá zistíme tak, že nájdeme limitu $\frac{x^2-9}{x+3}$ pre $x \to -3$ a zistíme, či táto limita $= 6$. Ak áno, funkcia je spojitá. Inak nie je.

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = \lim_{x\to -3} (x-3) = -3-3 = -6 \neq 6 \Rightarrow \text{funkcia nie je spojitá}$$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

b) $f: y = \begin{cases} \frac{x^3-4x}{x-2} & x \neq 2 \\ 8 & x = 2 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-4x}{x-2} = \lim_{2} \frac{x(x^2-4)}{x-2} = \lim_{2} \frac{x(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x+2)}{1} =$$

$$= 2\cdot(2+2) = 8 \Rightarrow \text{funkcia je spojitá}$$

c) $f: y = \begin{cases} 3+x^2 & x \leq 0 \\ \frac{\sin 3x}{x} & x > 0 \end{cases}$ → zistíme, či $\lim_{x\to 0} (3+x^2) \overset{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} (3+x^2) = 3+0^2 = 3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} \quad \cdot 3 \qquad \cdot 3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\cdot \sin 3x}{3x} = 3\cdot 1 = 3$$

limity sa rovnajú ⇒ funkcia je spojitá

dôležitý vzorec: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

3.103

a) $f: y = \begin{cases} ax & x<1 \\ 2-\frac{x}{a} & x\geq 1 \end{cases}$ musí platit: $\lim_{x\to 1} ax = \lim_{x\to 1}\left(2-\frac{x}{a}\right)$

$\lim_{x\to 1} ax = a\cdot 1 = a$, $\lim_{x\to 1}\left(2-\frac{x}{a}\right) = 2-\frac{1}{a}$

$a = 2-\frac{1}{a} \;/\cdot a$

$a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0 \Rightarrow \underline{a=1}$

b) $f: y = \begin{cases} e^{ax} & x<0 \\ a-x & x\geq 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} e^{ax} = e^{a\cdot 0} = e^0 = 1$

$\lim_{x\to 0}(a-x) = a-0 = a$

$\Big\} \Rightarrow \underline{a=1}$

c) $f: y = \begin{cases} \frac{-1}{x^2+a} & x<0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x & x\geq 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2+a} = \frac{-1}{0+a} = -\frac{1}{a}$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

$\Big\} \Rightarrow -\frac{1}{a} = 1 \;/\cdot a$

$-1 = a \rightsquigarrow \underline{a=-1}$

d) $f: y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x\leq -1 \\ x^2+ax & x>-1 \end{cases}$

$\lim_{x\to -1} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{-1}} = e^1 = e$

$\lim_{x\to -1}(x^2+ax) = (-1)^2+a\cdot(-1) = 1-a$

$\Big\} \Rightarrow e = 1-a$

$\underline{a = 1-e}$

3.1.4

a) $f: y = \frac{x}{x+4}$

Máme 2 druhy asymptot:

1. Asymptota bez smernice: $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \boxed{x = a}$ je as. bez sm. (ABS)

→ limita sprava / zľava

2. Asymptota so smernicou:

[Zisťujeme pre $x \to \infty$ a pre $x \to -\infty$]

ak $p = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - p \cdot x]$

$\Rightarrow \boxed{y = px + q}$ je a.s. so sm. (ASS)

ABS: $\lim\limits_{x \to -4^-} \frac{x}{x+4} = -\infty \Rightarrow x = -4$ je ABS / $\lim\limits_{x \to -4^+} \frac{x}{x+4} = \infty$ ⇝ stačí zistiť jednu jednostrannú limitu (sprava alebo zľava) či je $\pm\infty$

↘ x sa blíži bodu nespojitosti danej funkcie (zľava alebo sprava), t.j. bodu, pre ktorý nie je daná funkcia definovaná (v tomto prípade k -4, pretože $-4+4=0$ a to v menovateli nesmie byť)

~ limita sa rovná $-\infty$ - zistíme veľmi jednoducho tak, že za x dosadíme číslo, ktoré sa blíži k (-4) zľava, teda napr. $-3{,}999999999$ ⇝ vyjde obrovské záporné číslo a teda určite limita pôjde do $-\infty$ (neformálne zisťovanie hodnoty limity): $\frac{-3{,}999\ldots}{-3{,}999\ldots + 4} = -\infty$

ASS: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x+4}}{x} = \lim\limits_{\infty} \frac{x}{x \cdot (x+4)} = \lim\limits_{\infty} \frac{1}{x+4} = 0 = p$

$q = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x+4} - 0 \cdot x\right) = \lim\limits_{\infty} \frac{x}{x+4} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{x}\right)} = 1 = q$ ($\frac{4}{x} \to 0$)

$\Rightarrow$ $y = 1$ je ASS [$0 \cdot x + 1$] (pre $\lim\limits_{x \to -\infty}$ vyjdú p a q rovnaké)

3.1.4

b) $f: y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$

ABS: $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1-x^2}{x-2} = \dfrac{1-4}{1{,}999\ldots-2} = \dfrac{-3}{-0{,}00\ldots01} = \infty \Rightarrow \underline{\underline{x=2 \text{ je ABS}}}$

toto si treba písať niekde nabok a zapíšeme už len $\lim = \infty$

ASS: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1-x^2}{x-2}}{x} = \lim\limits_{\infty} \dfrac{1-x^2}{x(x-2)} = \lim\limits_{\infty} \dfrac{1-x^2 \cdot \frac{1}{x^2}}{x^2-2x \cdot \frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2}-1}{1-\frac{2}{x}} = \dfrac{-1}{1} = \underline{-1}$

$\frac{1}{x^2} \to 0$, $\frac{2}{x} \to 0$

$\lim\limits_{\infty} \left(\dfrac{1-x^2}{x-2} + 1\cdot x\right) = \lim\limits_{\infty} \left(\dfrac{1-x^2}{x-2} + x\right) = \lim\limits_{\infty} \left(\dfrac{1-x^2+x\cdot(x-2)}{x-2}\right) = \lim\limits_{\infty} \dfrac{1-x^2+x^2-2x}{x-2} =$

$= \lim\limits_{\infty} \dfrac{1-2x \cdot \frac{1}{x}}{x-2 \cdot \frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}-2}{1-\frac{2}{x}} = \dfrac{-2}{1} = \underline{-2} \Rightarrow \underline{\underline{y=-x-2 \text{ je ASS}}}$

$\frac{1}{x} \to 0$, $\frac{2}{x} \to 0$

[pre $\lim\limits_{x\to-\infty}$ vyjdu p a q rovnaké ako pre $\lim\limits_{x\to\infty}$]

c) $f: y = \dfrac{2x^2}{2x-1}$

ABS: $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^+} \dfrac{2x^2}{2x-1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{0{,}00\ldots01} = \infty \Rightarrow \underline{\underline{x=\frac{1}{2} \text{ je ABS}}}$

ASS: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{2x^2}{2x-1}}{x} = \lim\limits_{\infty} \dfrac{2x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(2x-1)} = \lim\limits_{\infty} \dfrac{2x \cdot \frac{1}{x}}{2x-1 \cdot \frac{1}{x}} = \lim\limits_{\infty} \dfrac{2}{2-\frac{1}{x}} = \underline{1}$

$\frac{1}{x} \to 0$

$\lim\limits_{\infty} \left(\dfrac{2x^2}{2x-1} - 1\cdot x\right) = \lim\limits_{\infty} \dfrac{2x^2-x(2x-1)}{2x-1} = \lim\limits_{\infty} \dfrac{2x^2-2x^2+x}{2x-1} = \lim\limits_{\infty} \dfrac{x \cdot \frac{1}{x}}{2x-1 \cdot \frac{1}{x}} =$

$= \lim\limits_{\infty} \dfrac{1}{2-\frac{1}{x}} = \underline{\frac{1}{2}} \Rightarrow \underline{\underline{y=x+\frac{1}{2} \text{ je ASS}}}$ [pre $\lim\limits_{x\to-\infty}$ rovnaké]

$\frac{1}{x} \to 0$

3.1.4

d) $f: y = 3x + \frac{3}{x-2} = \frac{3x(x-2)+3}{x-2} = \frac{3x^2-6x+3}{x-2} = \frac{3\cdot(x^2-2x+1)}{x-2} = \frac{3\cdot(x-1)^2}{x-2}$ → s takýmto tvarom funkcie sa mi bude ľahšie rátať

ABS: $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{3(x-1)^2}{x-2} = \frac{3}{0{,}00\ldots01} = \infty \Rightarrow$ **x=2 je ABS**

ASS: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{3(x-1)^2}{x-2}}{x} = \lim\limits_{\infty} \frac{3(x-1)^2}{x(x-2)} = \lim\limits_{\infty} \frac{3x^2-6x+3}{x^2-2x} \cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{3-\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = 3$ ($\frac{6}{x}, \frac{3}{x^2}, \frac{2}{x} \to 0$)

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3(x-1)^2}{x-2} - 3\cdot x\right) = \lim\limits_{\infty} \frac{3(x-1)^2 - 3x(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{\infty} \frac{3x^2-6x+3-3x^2+6x}{x-2} = \lim\limits_{\infty} \frac{3}{x-2} = 0$

$\Rightarrow$ **y = 3x je ASS** [pre $\lim\limits_{x\to-\infty}$ rovnaké]

~~b)~~ $f: y = x\cdot e^{\frac{1}{x^2}}$

ABS: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot e^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \cdot e^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} =$ ($\frac{1}{x} \to \frac{1}{0^+}$, $\cdot\frac{1}{x}$)

$= \frac{e^{\frac{1}{0^+}}}{\frac{1}{0^+}} \cdot \frac{1}{0_+} = \frac{e^{\infty}}{\infty} \cdot \infty = \infty\cdot\infty = \infty \Rightarrow$ **x=0 je ABS**

platí: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \nexists$

$\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{1}{x} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x} = \infty$ (ak $a>1$)

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{a^x} = 0$ (ak $a>1$)

$e = 2{,}71828\ldots$

0^+ je skrátený zápis pre „nula sprava", t.j. pre $\lim\limits_{x\to 0^+} x$

3.1.4

f) ASS: $\lim_{\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1$

$\lim_{\infty} (x e^{\frac{1}{x^2}} - 1 \cdot x) = \lim_{\infty} x \cdot (e^{\frac{1}{x^2}} - 1) = \lim_{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ $y = x$ je ASS [pre $\lim_{x \to -\infty}$ rovnaké]

dôležitý vzorec: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$ my máme $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x^2}}$ a platí: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$

g) $f: y = 4x e^{-x^2}$ ABS: za x môžeme dosadiť ľubovoľné číslo ($D(f) = (-\infty; \infty)$) $\Rightarrow$ ABS ∄

ASS: $\lim_{x \to \infty} \frac{4x e^{-x^2}}{x} = \lim_{\infty} 4 e^{-x^2} = 4 \cdot e^{-\infty} = \frac{4}{e^{\infty}} = \frac{4}{\infty} = 0$ $[a^{-x} = \frac{1}{a^x}]$

$\lim_{x \to \infty} (4x e^{-x^2} - 0) = \lim_{\infty} 4x e^{-x^2} = \lim_{\infty} \frac{4x}{e^{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{4x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x} \cdot \frac{x^2}{e^{x^2}}$

$= 0 \Rightarrow$ $y = 0$ je ASS [pre $\lim_{x \to -\infty}$ rovnaké]

$\frac{4}{x} \to 0$, $\frac{x^2}{e^{x^2}} \to 0$ lebo $\lim_{\infty} \frac{x}{a^x} = 0$ pre $a > 1$

h) $f: y = x + e^{-x}$ ABS ∄ ($D(f) = (-\infty; \infty)$)

ASS: $\lim_{x \to \infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{e^{-x}}{x}\right) = \lim_{\infty} \left(1 + \frac{1}{x \cdot e^x}\right) = 1$

$\lim_{\infty} (x + e^{-x} - 1 \cdot x) = \lim_{\infty} e^{-x} = \lim_{\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$\Rightarrow$ $y = x$ je ASS

(3.104) h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+e^{-x}}{x}=\lim\limits_{-\infty}\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{e^{-x}}{-x}\right)=1-\frac{e^{\infty}}{\infty}\overset{"}{=}1-\infty=\underline{-\infty}\Rightarrow$ pre tento prípad $\underline{p=-\infty}$

~ pokiaľ nám vyjde $p=\pm\infty$, v danom prípade ASS ∄

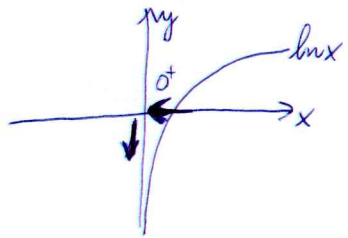
~ ∃ teda iba jedna ASS: $\underline{y=x}$ (pre $x\to\infty$)

~ na skúške a na zápočte odporúčam vyrátať ASS pre $x\to\infty$ aj pre $x\to-\infty$, pretože sa môže stať, že pre každý prípad vyjde iná asymptota

i) $f: y=x+\frac{\ln x}{x}$ ABS: $D(f)=(0;\infty)$, lebo $x\neq0\ \wedge\ x>0$

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+\frac{\ln x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x+\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)=\underline{-\infty}\Rightarrow$ $\underline{x=0}$ je ABS

($x\to0$, $\frac{1}{x}\to\infty$, $\ln x\to-\infty$)



ak si pozrieme graf $\ln x$, vidíme, že pre $x\to0^+$ sa blíži graf do $-\infty$

ASS: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\frac{\ln x}{x}}{x}=\lim\limits_{\infty}\frac{\frac{x^2+\ln x}{x}}{x}=\lim\limits_{\infty}\frac{x^2+\ln x}{x^2}=\lim\limits_{\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x^2}\right)=\underline{1}$

[pre $\lim\limits_{x\to-\infty}$ p ∄, lebo $\lim\limits_{x\to-\infty}(\ln x)$ ∄]

platí: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\frac{\ln x}{x}-1\cdot x\right)=\lim\limits_{\infty}\frac{\ln x}{x}=0\Rightarrow$ $\underline{y=x}$ je ASS